REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 2 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **8.1.** e **8.2.**). Dos restantes 12 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 9 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa vai enviar trigo e centeio a um cliente, num barco que tem a possibilidade de transportar até 27 toneladas de cereal.

O cliente pretende que, relativamente ao cereal a receber, o número de toneladas de trigo não seja superior ao dobro do número de toneladas de centeio e que o número de toneladas de centeio não seja superior ao dobro do número de toneladas de trigo.

A empresa obtém 1000 euros de lucro por cada tonelada de trigo que enviar e 2000 euros de lucro por cada tonelada de centeio que enviar.

Determine o número de toneladas de trigo e o número de toneladas de centeio que a empresa deve enviar ao cliente, de modo a obter o lucro máximo, nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x o número de toneladas de trigo e designe por y o número de toneladas de centeio, a enviar ao cliente, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. No último mês de agosto, o João passou férias no Algarve e a Maria passou férias na Costa Vicentina.

2.1. Durante essas férias, aproveitaram as idas à praia para, todos os dias de agosto, cada um fazer a sua caminhada no areal.

Ambos tinham uma aplicação no telemóvel que contabilizava o número de passos dados em cada caminhada.

Na sua primeira caminhada, no dia 1 de agosto, o João deu 3168 passos e, em cada uma das caminhadas seguintes, deu mais 710 passos do que na caminhada anterior.

Também no dia 1 de agosto, a Maria deu 4358 passos na sua primeira caminhada, e, em cada uma das caminhadas seguintes, deu mais 625 passos do que na caminhada anterior.

Determine o dia do mês de agosto em que o João e a Maria deram exatamente o mesmo número de passos nas respetivas caminhadas.

2.2. Num dos dias, a Maria decidiu fazer uma construção, tendo à sua disposição 271 conchas que tinha apanhado à beira-mar.

Foi colocando as conchas na areia, dispondo-as em filas: uma concha na primeira fila, duas conchas na segunda fila, quatro conchas na terceira fila, e assim sucessivamente, duplicando sempre, em cada fila, o número de conchas da fila anterior, até não ter conchas suficientes para fazer uma nova fila completa, de acordo com esta regra.

Quantas conchas sobraram à Maria, depois de terminar a construção? Justifique a sua resposta.

3. Admita que o desenvolvimento de uma certa população de peixes, a partir do instante em que se iniciaram as observações, é bem modelado pela função P, definida por

$$P(t) = \frac{20}{1+19e^{-0,5t}} \quad , \quad \text{com } t \geq 0$$

Neste modelo, $P(t)$ é o tamanho da população, em toneladas, t anos após o instante inicial.

Considere que o modelo se mantém válido por tempo indeterminado.

3.1. Determine, de acordo com o modelo apresentado, quantos anos decorreram, desde o instante inicial, até ao instante em que o tamanho da população de peixes atingiu 15 toneladas.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Determine, de acordo com o modelo apresentado, o instante em que o tamanho da população de peixes estava a crescer mais rapidamente.

Na sua resposta, comece por representar graficamente a função que dá a taxa de variação instantânea da função P para cada valor de t.

Apresente o tempo em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

3.3. Com o decorrer do tempo, e de acordo com o modelo apresentado, o tamanho da população de peixes poderia exceder as 20 toneladas?

Justifique a sua resposta.

4. Numa das variantes do Remo, cada barco tem um único remador que utiliza dois remos iguais.

A Figura 1 é uma fotografia de um praticante dessa variante do Remo.

Figura 1

Admita que, em cada instante de um determinado percurso, as posições dos remos são simétricas em relação ao plano longitudinal vertical do barco.

4.1. Na Figura 2, está representado um esquema relativo à posição dos remos num determinado instante.

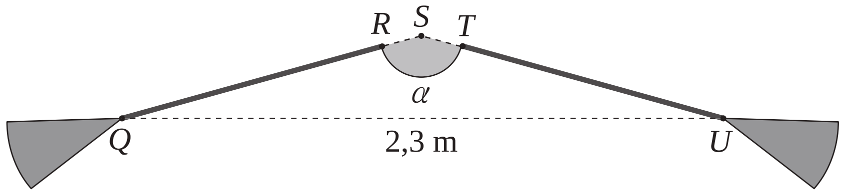

Figura 2

Neste esquema:

- $[QR]$ e $[TU]$ representam os cabos dos remos;
- o ponto S é a intersecção das retas QR e TU ;
- o triângulo $[QSU]$ é isósceles;
- $\overline{RS} = \overline{ST} = 0{,}10 \text{ m}$;
- $\overline{QU} = 2{,}3 \text{ m}$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo obtuso QSU , com $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}5$.

Determine o comprimento do cabo de um remo.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. Considere um ponto A situado na extremidade de um dos remos, como se ilustra na Figura 3.

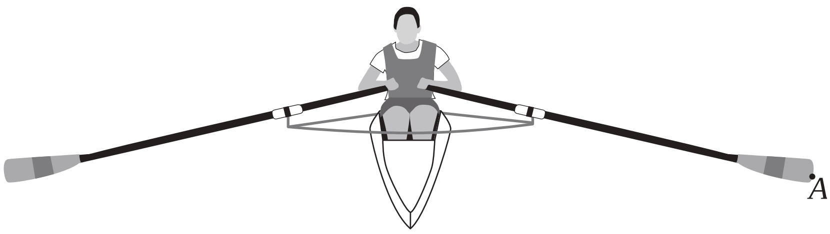

Figura 3

Seja h a função que dá a cota, em centímetros, do ponto A , relativamente à superfície da água, durante aquele percurso, t segundos após o seu início.

Admita que a função h é definida por

$$h(t) = 5 + 20 \cos(0{,}625\pi t) \quad , \quad \text{com } 0 \leq t \leq 400$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a diferença entre a cota máxima e a cota mínima do ponto A , relativamente à superfície da água, durante o percurso.

Apresente o resultado em centímetros.

5. Admita que a pressão da água do mar, em atm (atmosferas), varia com a profundidade, x , em metros, de acordo com a função definida por

$$p(x) = 0{,}1\,x + 1 \;, \quad \text{com } x \geq 0$$

5.1. Determine a pressão da água do mar à superfície.

5.2. Indique o valor do declive da reta que contém o gráfico da função p e interprete-o no contexto da situação descrita.

6. Na Figura 4, apresenta-se o polígono de frequências acumuladas referentes ao total de pescado, em toneladas, por mês, de janeiro a dezembro de 2018, em Portugal.

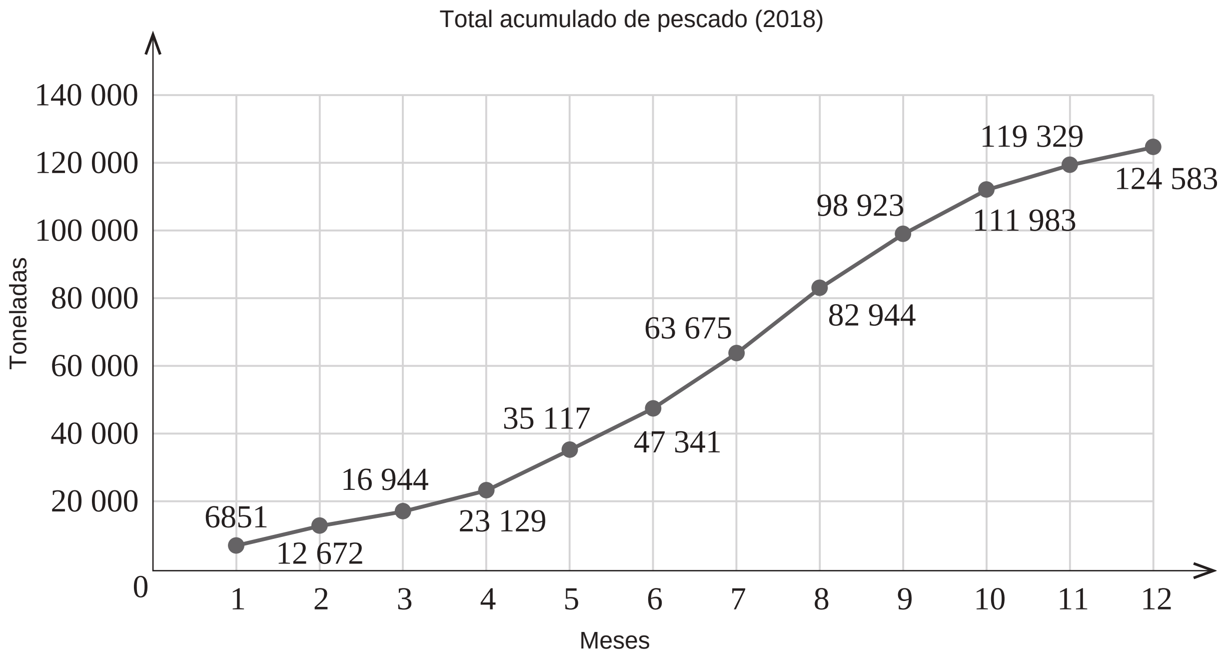

Figura 4

Em abril de 2018, a quantidade, em toneladas, de molusco capturado em Portugal foi cerca de $10{,}8\%$ da quantidade total de pescado **nesse mês**.

Determine a quantidade de molusco capturado, em Portugal, em abril de 2018.

Apresente o resultado em toneladas, arredondado às unidades.

7. Para cada espécie de pescado, está legalmente fixado o comprimento mínimo de captura, que é $15\ \text{cm}$ para o sargo. Se um sargo capturado tiver comprimento inferior a $15\ \text{cm}$, é devolvido ao mar.

Admita que, numa pescaria, o comprimento dos sargos capturados, em centímetros, segue uma distribuição normal de valor médio $22\ \text{cm}$ e desvio padrão $3{,}5\ \text{cm}$.

Um pescador escolhe, ao acaso, um sargo dessa pescaria.

Determine a probabilidade do sargo escolhido ser devolvido ao mar.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, utilize, pelo menos, quatro casas decimais.

8. No museu de Faro, encontra-se exposto o mosaico do deus Oceano, uma obra romana cuja fotografia se apresenta na Figura 5.

Figura 5

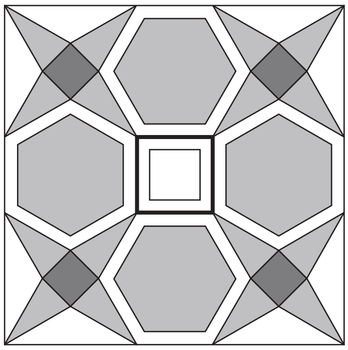

Figura 6

O esquema apresentado na Figura 6 foi construído com base nesse mosaico.

Neste esquema, estão representados, entre outros elementos:

- dois quadrados centrais não sombreados, em que o maior tem $3\ \text{cm}$ de lado;
- quatro quadrados sombreados, geometricamente iguais;
- hexágonos regulares sombreados, geometricamente iguais, contidos em hexágonos regulares também geometricamente iguais;
- triângulos isósceles sombreados, geometricamente iguais.

8.1. Determine a área de um dos quatro quadrados sombreados.

Apresente o resultado em cm^2, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

8.2. Na Figura 7, estão representados, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, um dos quadrados do mosaico, $[ABCD]$, e a reta AM.

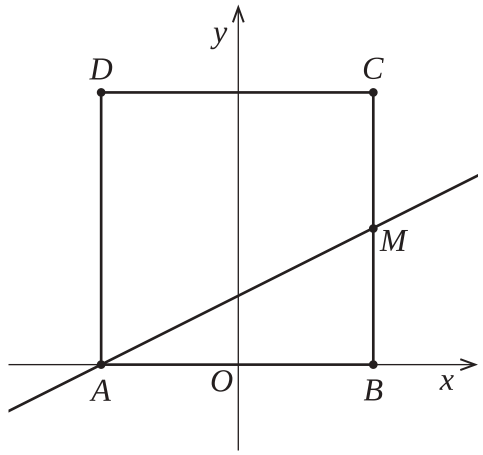

Figura 7

Sabe-se que:

- $[AB]$ está contido no eixo Ox;
- O e M são os pontos médios dos lados do quadrado a que pertencem;
- $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.

A unidade do referencial é o centímetro.

Determine a equação reduzida da reta AM.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 2 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="6">8.1.</td><td colspan="6">8.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="6">20</td><td colspan="6">18</td><td>38</td></tr>
<tr><td>Destes 12 itens contribuem para a classificação final da prova os 9 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>3.3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">9 x 18 pontos</td><td>162</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>