

## Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

### Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.2.**, **3.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

# Formulário

---

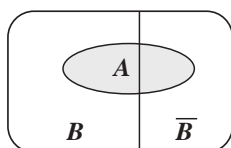
## Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

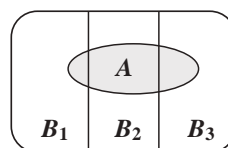
## Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

## Modelo normal

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $\sigma$  – desvio padrão da variável  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $s$  – desvio padrão amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\hat{p}$  – proporção amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

1. O Filipe e nove dos seus amigos decidiram ir juntos a um festival de música.

Como tinham interesse nos festivais A, B e C, decidiram proceder a uma votação para seleccionar um deles.

Cada um dos amigos preencheu um boletim de voto, no qual estava representado um triângulo equilátero, de vértices A, B e C, dividido em seis regiões. Para votar, cada uma das dez pessoas registou uma marca (x) numa das seis regiões, de acordo com as suas preferências.

Na Figura 1, apresenta-se um exemplo de boletim de voto preenchido.

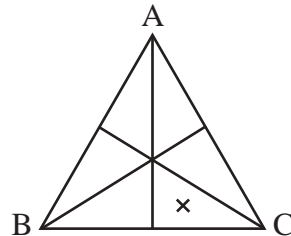


Figura 1

O exemplo apresentado corresponde ao voto na lista com a ordem de preferências CBA, pois a marca (x) foi colocada numa região onde o vértice C é o mais próximo, seguindo-se o B e, finalmente, o A.

1.1. Considere os seis boletins de voto apresentados na Figura 2.

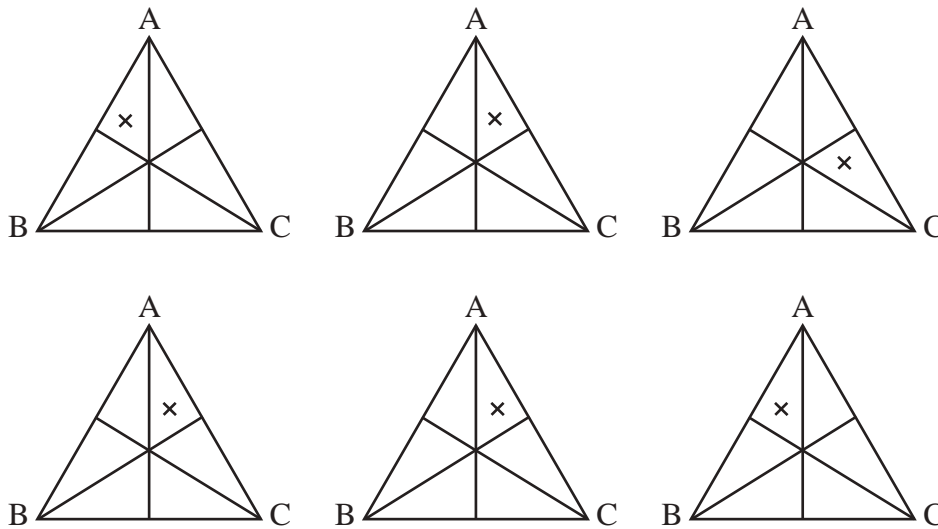


Figura 2

Escolhe-se, ao acaso, um destes seis boletins e a lista de preferências nele registada.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

Q: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival A ocupa a primeira preferência»

R: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival B ocupa a última preferência»

Qual é o valor da probabilidade condicionada  $P(Q | R)$ ?

(A)  $\frac{1}{2}$

(B)  $\frac{3}{5}$

(C)  $\frac{3}{4}$

(D)  $\frac{5}{6}$

1.2. Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a decisão final.

- São atribuídos pontos a cada um dos festivais em função do seu lugar na ordem da lista de preferências.  
Cada festival recebe:
  - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos festivais e o mais pontuado será o escolhido.
- Em caso de empate, o festival será escolhido por sorteio.

A Tabela 1 apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto do Filipe.

Tabela 1

Preferências \ Votos	Votos			
	2	2	2	3
1. <sup>a</sup>	A	A	C	B
2. <sup>a</sup>	B	C	B	C
3. <sup>a</sup>	C	B	A	A

Admita que, depois de contabilizado o voto do Filipe, o festival B ficou em primeiro lugar e o C em último, não tendo havido qualquer empate.

Apresente a lista de preferências registrada no boletim de voto do Filipe.

Na sua resposta, apresente a pontuação de cada festival, resultante da aplicação do método acima descrito:

- antes de ser contabilizado o voto do Filipe;
- depois de ser contabilizado o voto do Filipe.

2. Dois irmãos, a Elsa e o Manuel, receberam de presente seis bilhetes, B1, B2, B3, B4, B5 e B6, para seis festivais diferentes.

A Elsa valoriza três vezes mais o bilhete B2 do que qualquer um dos outros bilhetes, sendo todos os outros bilhetes valorizados da mesma forma.

Qual das seguintes opções pode representar um conjunto de bilhetes que a Elsa valoriza em 50% do valor global dos bilhetes?

- (A) B1; B4; B6      (B) B2; B3; B5      (C) B1; B3; B5; B6      (D) B2; B3; B4; B5

3. Dois amigos, a Elsa e o Gaspar, partilharam um fogão de campismo (F), uma mesa de campismo (M) e uma tenda (T) durante alguns anos; porém, sendo cada vez mais difícil conciliar a partilha dos bens, decidiram distribuí-los entre os dois.

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três bens, os amigos resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos bens, num total de 100 pontos.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) bem(ns) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual no total de pontos, através da partilha de um dos bens. Os outros bens ficam definitivamente atribuídos a cada um dos amigos.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$  com o qual a partilha ficará equilibrada.
- O amigo B fica com o(s) bem(ns) a si destinado(s) e  $x$  por cento da utilização do bem a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na Tabela 2, apresenta-se o número de pontos atribuídos aos três bens por cada um dos amigos.

Tabela 2

	F	M	T
Elsa	19	26	55
Gaspar	35	5	60

Atendendo aos dados apresentados na Tabela 2, os amigos concluíram que o bem a partilhar seria a tenda.

Assim, após a aplicação do método descrito, determinaram o número de dias em que, num ano, cada um deles poderia utilizar a tenda.

Admita que, até agosto, num ano com 365 dias, o Gaspar já tinha utilizado a tenda durante 146 dias.

Será que ainda a poderá utilizar durante os cinco dias do festival de verão a que pretende ir?

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos bens pelos dois amigos;
- determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada amigo;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- apresente a partilha final dos bens pelos dois amigos;
- determine o número de dias em que o Gaspar pode utilizar a tenda.

4. Num determinado verão, decorreram os festivais F1, F2, F3, F4, F5 e F6. Estes festivais realizaram-se ao fim de semana e tiveram, cada um, a duração de dois dias (sábado e domingo).

Na Tabela 3, apresentam-se os festivais a que quatro jovens assistiram. Cada jovem assistiu, sempre, a ambos os dias de cada um dos festivais.

Tabela 3

Jovens	Festivais
Elsa	F1, F2, F3
Filipe	F1, F2, F4
Gaspar	F1, F3, F5
Manuel	F4, F5, F6

Indique o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido.

Na sua resposta:

- apresente um grafo que modele a situação descrita;
- identifique os festivais que decorreram em simultâneo.

5. Para pagar as despesas da sua ida a um festival, o Filipe utilizou uma poupança no valor de 240 euros, feita ao longo de 16 meses.

Após um depósito inicial, o Filipe depositou mensalmente uma quantia fixa, que corresponde a uma percentagem do valor depositado inicialmente.

Determine a que percentagem do depósito inicial corresponde a quantia fixa depositada em cada mês, sabendo que o valor final da poupança foi o dobro do depósito inicial.

6. Um balão publicitário foi lançado de uma plataforma.

Admita que,  $t$  minutos após ser lançado, a altura do balão, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-2t}} \quad \text{para } t \in [0, 5]$$

6.1. Determine quantos metros subiu o balão no primeiro minuto.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

6.2. Quando o balão subiu dos 12 até aos 20 metros de altura, foram lançados confetes.

Determine durante quantos segundos decorreu o lançamento dos confetes.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às centésimas.

7. A venda de bilhetes para o concerto da banda *BigBand* gerou tanta procura que, na véspera do primeiro dia de venda, se formou fila para a aquisição de bilhetes à porta da bilheteira.

Ao longo do primeiro dia de venda dos bilhetes, as pessoas foram questionadas sobre o número de horas que permaneceram na fila antes da abertura da bilheteira ( $x$ ) e sobre o tempo, em horas, que decorreu desde a abertura da bilheteira até terem adquirido os bilhetes ( $y$ ).

A Tabela 4 apresenta as respostas dadas por sete das pessoas questionadas: A, B, C, D, E, F e G.

Tabela 4

Pessoa	$x$ (horas)	$y$ (horas)
A	30	0,5
B	24	1
C	22,5	2
D	18	4
E	12	8
F	8	9
G	3	12



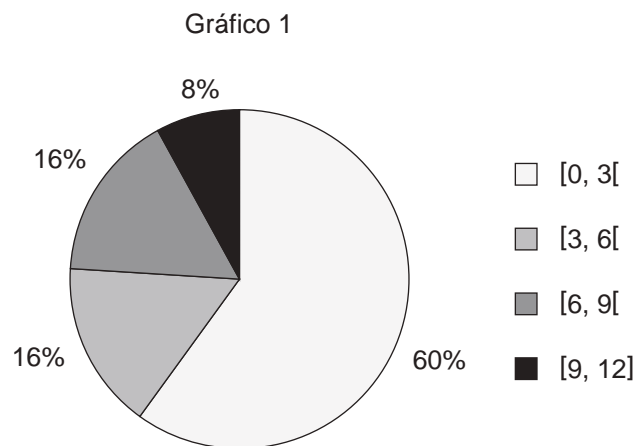
7.1. O Filipe e um amigo chegaram e permaneceram juntos na fila para a aquisição de bilhetes.

O tempo médio de espera das nove pessoas, as sete referidas na Tabela 4 e os dois amigos, até à abertura da bilheteira foi 15,5 horas.

Determine quantas horas o Filipe esperou na fila até à abertura da bilheteira.

7.2. No final do primeiro dia de venda dos bilhetes, foi registado o tempo de espera de cada cliente, em horas, decorrido desde a abertura da bilheteira até ter adquirido os bilhetes, incluindo as pessoas mencionadas na Tabela 4.

A informação recolhida foi organizada num gráfico circular semelhante ao Gráfico 1.



Admita que, das pessoas indicadas na Tabela 4, as que esperaram menos de três horas correspondem a 0,4% do número total de pessoas que adquiriram bilhetes nesse intervalo de tempo.

O número total de clientes que, nesse dia, adquiriram bilhete foi:

(A) 1250

(B) 5

(C) 750

(D) 50

7.3. Admita que a relação entre as variáveis  $x$  e  $y$ , da Tabela 4, é bem aproximada por uma regressão linear, na forma  $y = ax + b$ .

Determine qual poderá ter sido o tempo que decorreu desde a abertura da bilheteira até à aquisição dos bilhetes por parte de uma pessoa que tenha estado seis horas na fila antes da abertura da bilheteira.

Apresente o resultado em horas, arredondado às unidades.

Na sua resposta, apresente a equação da reta de regressão, com os valores de  $a$  e de  $b$  arredondados com três casas decimais.

8. Foi realizado um estudo estatístico junto do público de um festival.

8.1. Nesse festival, todos os dias, após o último concerto, há um espetáculo de fogo de artifício.

No último dia do festival, verificou-se que:

- 60% do público assistiu ao primeiro concerto do dia;
- 48% do público assistiu ao primeiro concerto do dia e viu o fogo de artifício;
- do público que não assistiu ao primeiro concerto do dia, 30% não viu o fogo de artifício.

Escolheu-se ao acaso uma pessoa que foi ao último dia do festival.

Determine a probabilidade de essa pessoa não ter visto o fogo de artifício.

8.2. Os dados recolhidos permitem concluir que o consumo de bebidas das 60 000 pessoas presentes durante os vários dias desse festival segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 1,5 litros e desvio padrão 0,4 litros.

Quantas pessoas será de esperar que, durante o festival, tenham consumido no máximo 0,3 litros de bebida?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

9. A organização de um festival disponibiliza quatro zonas para acampar, Z1, Z2, Z3 e Z4. Com o intuito de saber qual a zona mais pretendida, a organização levou a cabo um inquérito a algumas pessoas, selecionadas ao acaso.

Na Tabela 5, está registado o número de pessoas que manifestaram intenção de acampar em cada uma das zonas.

Tabela 5

Zona	Z1	Z2	Z3	Z4
N.º de pessoas	125	250	150	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de pessoas que têm intenção de acampar na zona Z1, face ao número total de pessoas que têm intenção de acampar, é 0,05264.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.2.</b>				<b>3.</b>				<b>7.1.</b>			<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	20				18				18			<b>56</b>
Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>1.1.</b>	<b>2.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.1.</b>	<b>6.2.</b>	<b>7.2.</b>	<b>7.3.</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>9.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 18 pontos											<b>144</b>
<b>TOTAL</b>												<b>200</b>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 835**

1.<sup>a</sup> Fase